

# 漏刻の原理と水位変化の数値計算

佐々木勝浩

〒169-0073 東京都新宿区百人町3-23-1, 国立科学博物館理工学研究部

## The Principle of “Rokoku (Water Clocks)” and the Numerical Calculation of their Water Level

Katsuhiro SASAKI

Department of Science and Engineering, National Science Museum,  
3-23-1 Hyakunin-cho, Shinjuku, Tokyo, 169-0073, Japan

**Abstract** Rokoku is the water clock used in ancient China, and the origin goes back to thousands years ago. The multistage type Rokoku which has several vessels as the typical form can be mentioned, and the first vessels is for water supply, the middle vessels are for control of flow rate of water, and the last vessel is for time measurement. The last vessel has a float with the time scale which we can read and know time. Although researches of J. Needham or D. Price were known, the sufficient interpretation about the accuracy and the usage of Rokoku as a clock was not carried out.

In this research, first the physical character of a single vessel was observed, subsequently the change of the water level of each vessel was calculated numerically, and then the static and dynamic characteristics of Rokoku were examined. Consequently, in multistage type Rokoku it was able to confirm that the vessels play an important role in control of a water flow, a fixed quantity of water is supplied periodically when actual using, for example 2 times everyday (in the morning and in the evening), and in the case of that sufficient accuracy is secured, etc.

**Key words:** Rokoku, Water clocks, Time measurement

### 1. はじめに

漏刻は古代中国で使われた水時計である。その起源は伝説上の黄帝に遡ると言われ、数千年の歴史を持つとされている。漏刻についてはニーダム<sup>1)</sup>やプライス<sup>2)</sup>の研究があるが、その特性、精度、あるいは使用方法など詳しいことについてはあまりよく示されていない。今回、漏刻における各水槽の水位の変化を数値計算によって計算し、その特性の物理的な検証を行った。

こうした漏刻の物理学的検証は過去いくつか試みられたが<sup>3),4)</sup>、その特性や使用方法についての解釈は不十分であるように思われる。本研究では、まず単一水槽の物理的な性質を古典的流体力学から確かめ、その上で数値計算によって各水槽の水位の変化を計算した。本稿は、その結果をもとに多

段型水槽システム全体の性質を把握した上で、漏刻の特性、精度、使用法などを推論するものである。

### 2. 古図に現れた漏刻

漏刻の形は時代とともに様々に変化したが、唐代には複数の水槽をもつ多段形の漏刻へ発展し、一つの計時システムとして確立した。このような多段型の漏刻は、基本的には水を供給する流水槽、流量を調整する補正水槽、水位の上昇をフロートに取り付けられた目盛りで読みとる装置が付いた受水槽から成る(図1)。図2は、江戸時代中期の『宣明暦』の口絵に掲載された漏刻で、原典は1478年に印刷された『事林廣記』とされるが、こうした五段型の漏刻は唐の呂才に帰結する

と言われている。また、『宣明暦』に「今製蓮漏図」として紹介されている漏刻は、三段型で、受水槽の石壺上の蓮華が上昇し蓮芯（蓮華の茎）に刻まれた目盛りで時刻を読むようになっている。これは、1030年頃に燕蕭が製作した蓮華漏と呼ばれるものである（図3）。

漏刻が日本へ伝えられたのは飛鳥時代で、中大兄皇子が齊明天皇六（660）年に漏刻を製作したこと、さらに皇子即位後の天智天皇十（671）年、新たに遷都した大津において漏刻を設置し、鐘と太鼓で時を知らせたことが、日本書紀に記されている。その後、漏刻を使った報時業務は、漏刻博士という形で制度化されたが、漏刻の装置や使用法などの技術は長くは伝えられなかった。現在、天智天皇の漏刻は、天保九（1838）年筑後柳川の桜井養仙が著した『漏刻説』の挿絵でしか見ることができない（図4）。

今回、数値計算を行う際に用いた漏刻のモデルは、基本的には天智天皇や呂才の四段ないし五段の多段型漏刻を想定した。

### 3. 漏刻の基本原則

#### 1) 単一水槽の流水モデル

実施する数値計算は、多段型の漏刻についてであるが、それは各水槽の流水の性質が解っていることが前提である。ここでは、単一水槽の理論的性質および実験的性質を確かめる。

[トリチェリの定理による流速] 単一水槽の底

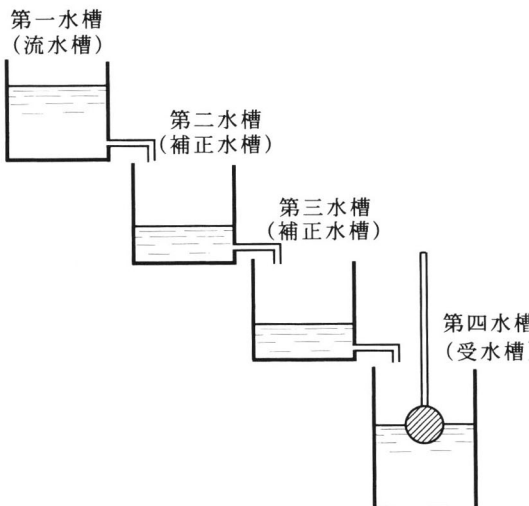


図1. 漏刻の原理図

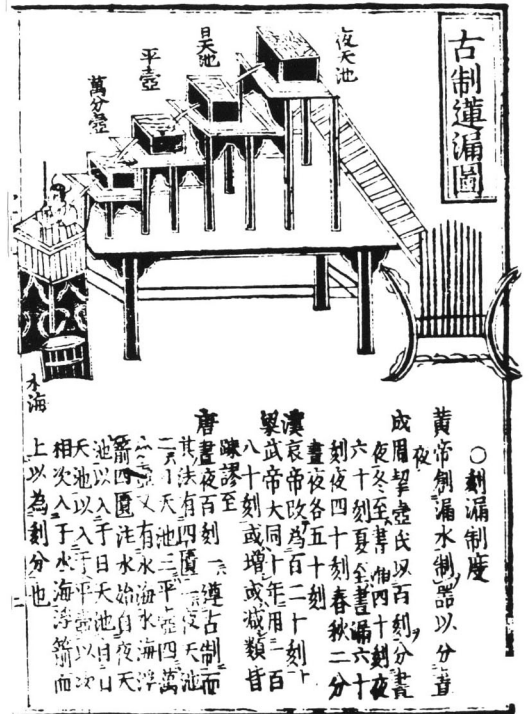


図2. 古代中国の漏刻の図



図3. 蓮華漏の図

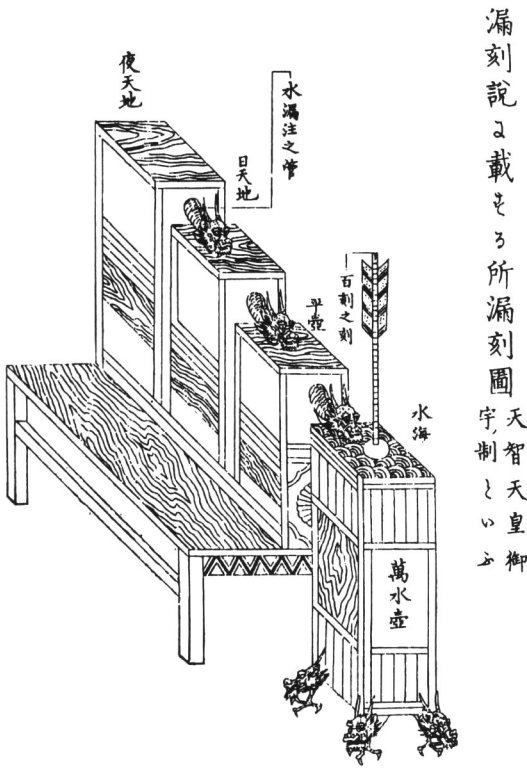


図4. 天智天皇の漏刻

部付近に流出孔を開け、そこから水を流す場合を考える。水槽の水平断面積  $A$  が流出孔の面積  $B$  に較べて十分に大きいとき、流出孔付近の流速  $v$  は、トリチェリの定理によれば次の式で表わされる。

$$v = \sqrt{2gh} \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 $g$  は重力の加速度、 $h$  は流出孔から水面までの高さ（水位）である。

ここで、

$$c = \sqrt{2g}$$

とおくことにより、次式を得る。

$$v = c\sqrt{h} \dots\dots\dots(2)$$

これから、流速  $v$  は水位  $h$  の平方根に比例することがわかる。

[レイノルズの実験による流速] トリチェリの定理は完全流体の仮定の上に成り立つが、実際の水の場合にも適用できるかどうか確かめる必要がある。水槽に満した水が底部付近に取りつけられた細い管から流れ出る場合の水位  $h$  と流速  $v$  の

表1. いろいろな材料における  $m$  の値<sup>6)</sup>

材料	鉛	わにす	ガラス	新鑄鉄	古鑄鉄
$m$ 値	1.79	1.82	1.79	1.88	2.0

関係を示す古典的な実験が、レイノルズ (Reynolds, O., 1842-1912) によって行われている。

時間によって変化する水位  $h$  を測定すれば、水槽の断面積  $A$  と管の断面積  $B$  を用いて流速  $v$  が計算できる。さらに、縦軸に実験で測定した水位  $h$  の対数を、横軸に流速の対数をとると、水位  $h$  の変化をグラフに描くことができる。グラフは二つの異なる傾きを持つ直線部分とそれらをつなぐ不安定な部分からなり、それぞれの傾きから流速  $v$  に対する次数  $m$  を実験的に求められる。ここで水位  $h$  は流速  $v$  の  $m$  次の関数と考えると、次のように書くことができる。即ち、

$$h = kv^m \dots\dots\dots(3)$$

ここで両辺の対数をとって、

$$\log h = m \log v + \log k \dots\dots\dots(4)$$

グラフの二つの直線部分について、(4) 式を実験式として当てはめる。  $\log k$  は直線の切辺、 $m$  はその傾きであり、これより実験式について係数  $m$  および  $k$  を求めることができる<sup>5)</sup>。

一般に  $v$  が小さい所での直線の傾き  $m$  は約1で、 $v$  が大きい所での傾き  $m$  は約2である。この値は管の内壁の粗さによって多少異なり、表1のような値が報告されている。また、 $m$  が1のときは管の中を流れている水が層流状態にある場合で、 $m$  が2のときは乱流状態の場合である。

### 2) 多段型水槽の流水モデル

単一水槽における水位の変化は解析的に解くことができる。しかし、多段型水槽については解くことはできないので、コンピュータ等による数値計算によって水位の変化を調べなければならない。

流水モデルの基本的性質を調べるためには、水槽の形や条件は単純な方が望ましい。文献に現われた漏刻の形から、数値計算を行なう流水モデルを次のように規定した。

a. 四段ないし五段の多段型水槽とした。なお、第一水槽は水を供給するための水槽で流水槽、第二水槽、第三水槽などの中間水槽を補正水槽、さらに時刻を読み取る最終段の水槽を受水槽とそれ

ぞれ呼ぶことにした。

- b. 水槽の形は水平断面積  $A$  を一定とする直筒型とした。
- c. 流出孔付近の流水は層流状態と乱流状態の両方を考慮することにした。

#### 4. 流水モデルによる数値計算

##### 1) 流量関数と単一水槽の解析的解

[流量関数と流出抵抗] 前項に於いて、水槽の流出孔付近の流速  $v$  は、(3) 式において  $m$  がおよそ 1 または 2 の値を取るところから水位  $h$  または  $\sqrt{h}$  にほぼ比例することがわかった。これから流量  $Q_i$  (単位時間当たり流れ出る水の量) は、流出孔の面積  $B$  に流速  $v$  を掛けることによって求めることができる。すなわち、

$$Q_i = Bv_i \dots\dots\dots(5)$$

ここで添字  $i$  は、層流状態 (*laminar*) または乱流状態 (*turbulent*) の頭文字をとつて  $l$  または  $t$  と置き換え、それぞれの式に書き換えることができる。

即ち (3) 式において、 $m$  の値に層流状態では 1、乱流状態では 2 を代入して  $v_l, v_t$  を求め、これを (5) 式に代入して、

$$Q_l = \frac{B}{k_l} h \quad \text{および} \quad Q_t = \frac{B}{\sqrt{k_t}} \sqrt{h}$$

を得る。ここで、

$$R_l = \frac{k_l}{B}, \quad R_t = \frac{\sqrt{k_t}}{B}$$

とそれぞれ置いて次式を得る。

$$Q_{l(h)} = \frac{1}{R_l} h \quad \text{および} \quad Q_{t(h)} = \frac{1}{R_t} \sqrt{h} \dots\dots(6)$$

$Q_l(h), Q_t(h)$  は水位  $h$  をパラメータとする関数で、流量関数と呼ぶことにする。また  $R_l, R_t$  は流出孔の断面積に反比例する係数であり、これが大きいほど流量は少なく、小さいほど流量は大きくなる関係にある。したがって、それは流出抵抗と呼ぶべきものである。

[単一水槽の流水モデルの解析的解] 単一水槽の流水モデルについては、前項で定義した流量関数によって水位の変化のようすを解析的に解くことができる。

単一水槽において、微小時間  $\Delta t$  の間に水位  $\Delta h$

が変化したとする。水槽の断面積  $A$  に  $\Delta h$  を掛けたものが  $\Delta t$  の間に流出した水の総量であることから、

$$A\Delta h = -Q_i \Delta t \dots\dots\dots(7)$$

を得る。 $Q_i$  は一般化した流量関数で正の値をとり、左辺の負記号は水位  $h$  の下降を表わしている。

ここで (6) 式の両辺の極限をとり整理することによって、次の微分方程式を得る。

$$\frac{dh}{dt} + \frac{Q_i}{A} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

以下、層流と乱流それぞれの場合について微分方程式を解析的に解くことにする。層流の場合；(6) 式の層流の流量関数  $Q_l(h)$  を (8) 式に代入しての次の微分方程式を得る。

$$\frac{dh}{dt} + \frac{h}{AR_l} = 0 \dots\dots\dots(9)$$

(9) 式は最も標準的な微分方程式の一つで、一般解は次式で与えられる。

$$h = Ce^{-(1/AR_l)t} \quad (C \text{ は積分常数})$$

ここで、 $t=0$  のとき  $h=h_0$  より、

$$C = h_0$$

従つて、微分方程式の解として次式を得る。

$$h = h_0 e^{-(1/AR_l)t} \dots\dots\dots(10)$$

(10) 式の両辺を  $h_0$  で割り、

$$\frac{h}{h_0} = H, \quad \frac{t}{AR_l} = T$$

と置いて基準化し (11) 式を得る、

$$H = e^{-T} \dots\dots\dots(11)$$

式を基準化することによって数値計算を単純化でき、パラメーターや定数を代入するだけで計算の結果を異なる水槽に適用することが容易となる。なお (11) 式によって、層流の場合の水位の下降曲線は指数関数で表されることが解る。

乱流の場合；(6) 式の乱流の流量関数  $Q_t(h)$  を (8) 式に代入しての次の微分方程式を得る。

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\sqrt{h}}{AR_t} = 0 \dots\dots\dots(12)$$

(12)式についても同様に容易に解くことができ、一般解は次式で与えられる。

$$h = \left(-\frac{t}{2AR_t} + C\right)^2$$

ここで、 $t=0$ のとき  $h=h_0$  より

$$C = \sqrt{h_0}$$

従って、微分方程式の解として次式を得る。

$$h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{t}{2AR_t}\right)^2 \dots\dots\dots(13)$$

(13)式の両辺を  $h_0$  で割り、

$$\frac{h}{h_0} = H, \quad \frac{t}{AR_t\sqrt{h_0}} = T$$

と置いて基準化し (14) 式を得る。

$$H = \frac{1}{2}(2-T)^2 \dots\dots\dots(14)$$

なお (14) 式によって、乱流の場合の水位の下降曲線は二次関数で表されることが解る。

**2) 水槽の水位の数値計算**

前項で示したように、単一水槽では水位の変化を解析的に解くことができるが、多段型水槽において水位の変化は解析的に解くことは困難である。その場合は数値計算によってしか解くことができない。ここでは、多段型水槽について水位変化の逐次計算の方法を示す<sup>7)</sup>。ここで、各々の水槽の水平断面積および流出孔の面積はそれぞれ全て等しいと仮定する。

(6)式を用いて (7)式を次のように変形する。

$$\Delta h_j = \frac{-1}{AR_i} f_i(h_j)\Delta t \dots\dots\dots(15)$$

ただし、 $f_i(h_j)$  のとり得る関数形は  $h_j$  または  $\sqrt{h_j}$  である。ここで、 $j$  は水槽の番号を示す。

(15)式によって、ある時刻  $t$  における各水槽の水位  $h_j$  から水位の変化分  $\Delta h_j$  を計算し、これを  $\Delta t$  間一定であると仮定して  $\Delta t$  後の水位  $h'_j$  を計算する。この作業を逐次繰り返して各時刻に対するの水位を順次計算することができる。このとき  $\Delta t$  を小さくすればするほど計算の精度は向上する。

以下、四段型漏刻を例にとりて、水槽毎に逐次計算の式を示す。

[第一水槽] 漏刻の給水槽であり、水位の初期

値を  $h_0$  とし、水の供給はないものとする。したがって計算式には流出項だけを考慮し、それは負の値をとる。

ある時刻  $t$  における水位  $h_1$  が  $\Delta t$  後に水位  $h'_1$  に移動したとき、水位  $h'_1$  は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} h'_1 &= h_1 + \Delta h_1 \\ &= h_1 + \frac{-1}{AR_i} f_i(h_1)\Delta t \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

[第二水槽] 漏刻の補正水槽であり、ここには第一水槽から流出した水が供給されている。したがって、計算式には流出項と供給項の両方を考慮しなければならない。 $\Delta h$  は負の値をとるので、当然のことながら流出項は負であり、供給項は正となる。

$$\begin{aligned} h'_2 &= h_2 + \Delta h_2 - \Delta h_1 \\ &= h_2 + \frac{-1}{AR_i} f_i(h_2)\Delta t - \frac{-1}{AR_i} f_i(h_1)\Delta t \dots\dots(17) \end{aligned}$$

[第三水槽] 漏刻の補正水槽であり、ここには第二水槽から流出した水が供給されている。第二水槽と同様に、計算式には流出項と供給項の両方を考慮しなければならない。同様に流出項は負で、供給項は正である。

$$\begin{aligned} h'_3 &= h_3 + \Delta h_3 - \Delta h_2 \\ &= h_3 + \frac{-1}{AR_i} f_i(h_3)\Delta t - \frac{-1}{AR_i} f_i(h_2)\Delta t \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

[第四水槽] 漏刻の受水槽であり、ここには第三水槽から流出した水が供給され、水は流出しない。したがって、計算式には供給項だけを考慮すればよい。供給項は正の値でなければならない。

$$\begin{aligned} h'_4 &= h_4 - \Delta h_3 \\ &= h_4 - \frac{-1}{AR_i} f_i(h_3)\Delta t \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

このようにして、各水槽に対する水位の変動を逐次計算することができる。なお、同様の考え方で更に段数の多い漏刻の計算が可能であるが、どの場合も第一水槽が給水槽であり最終水槽を受水槽として計算する。

**3) 単一水槽による水位変化の測定**

次に、逐次計算の式の水位の関数  $f_i(h_j)$  の関数形を決めるために、単一水槽による流水の実験を行った。

使用した水槽は、高さ 30.0 cm、内径 16.0 cm の

アクリル製円筒形で、底部から2.0 cmのところから長さ10.0 cm、内径0.22 cmのガラス管を水平に取り付けた。水槽の側面にはスケールを貼り付け、等時間間隔で水位を読み取った。念のため測定を行った際の環境は、夏の午後で、室内の気温31°C、水温27°Cであったことを付記する。

測定した水位の変化を図5に示す。各時間における測定値のデータの階差を取って図中にプロットするとほぼ直線となり、これから水位の変化はほぼ二次曲線で近似できることがわかる。階差の平均から二次曲線の方程式を概算すると、次式を得る。なおこの二次曲線はデータと良く一致している。

$$h = \frac{0.89}{4}(t - 33)^2 + 8.7, \quad (0 \leq t \leq 33) \dots\dots(20)$$

次に、データから層流から乱流への移行の状況を調べた。数の推定を試みる。t間隔で測定した2つの水位  $h_k, h_{k+1}$  間で流量を一定と見なすと流速  $v$  は、

$$v = (h_k - h_{k+1}) \frac{A}{B} \frac{1}{t} = 44.08(h_k - h_{k+1}) \dots\dots(21)$$

ここで  $h$  を  $h_k$  と  $h_{k+1}$  の中点（平均水位）とし縦軸に  $\log h$ 、横軸に  $\log v$  をとってプロットすると図6のようになる。

図より  $h$  が2 cmより上 ( $\log h \geq 0.302$ ) では、点はほぼ直線上に並び、その傾き  $m$  は約1.7であることが解った。なお、図中の点線区間が層流から乱流への移行区間と考えられる。

これらのことから、計算に用いる関数  $f(h)$  の形  $\sqrt{h}$  はを用いるのが妥当であると考えられる。

4) 水の供給方法

計算を始める上で、水の供給方法を仮定する必要がある。水をどのように供給するかは、漏刻の使用法にかかわる重要な問題である。以下に多段型水槽の流水モデルに対して想定し得る水の供給方法を掲げる。

- a. 流水槽および補正水槽のすべてに水を満たして、一斉に流し始める。その後の水の供給は行なわない。
- b. 流水槽のみを満水に、他の水槽を空の状態から始める。その後の水の供給は行なわない。
- c. 流水槽に周期的に一定量の水を供給する。
- d. 流水槽の水位を強制的に振動させる。
- e. 流水槽に一定流量の水を連続的に供給する。

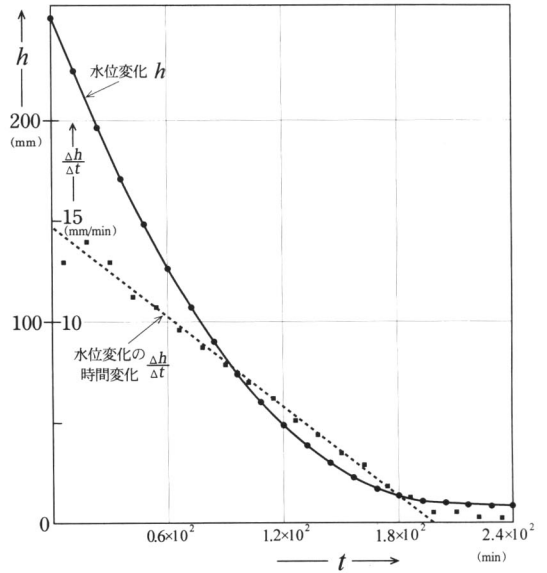


図5. 水槽の推移変化の測定

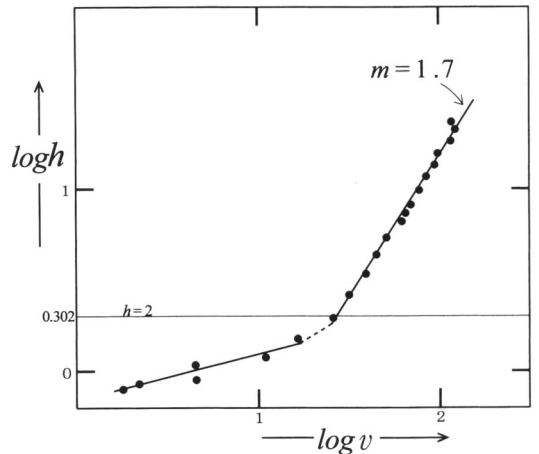


図6. 臨界レイノズル数の推定

漏刻を信号の入力出力をもつ一つの伝達系と考えると、水の供給は信号の入力であり、水位によって示される時刻は信号の出力と見ることがができる。aおよびbは、伝達系の入力信号に対する過渡応答であり、漏刻の静特性を調べることになる。これに対してc, dは正しく周波数応答であり、動特性を調べることになる。なお、eは定常流が補償されることになり、多段型の漏刻としての意味を持たない。したがって、数値計算はeの場合を行なう必要はない。

### 5) 数値計算の結果

前項に掲げた水の供給方法を仮定し、静特性と動特性の実際を調べるためにコンピュータによる数値計算を行った。

[計算の条件] 給水方法毎の計算の条件および初期値は、以下の通りである。

給水方法a—静特性—；水槽は五段とし、水槽の断面積Aおよび流出抵抗Rは、基準化するためにそれぞれ1とした。

水位の初期値Hは、第五水槽に全て水が流入したときのHが1となるように第一から第四水槽まで0.25とした。

給水方法b—静特性—；水槽は四段とし、AおよびRはそれぞれ1、第一水槽の水位Hのみを1とした。

給水方法c—動特性—；水槽は四段とし、AおよびRはそれぞれ1、第一水槽の水位の初期値Hは1で、 $T=2$ ごとに水位1の補給を繰り返した。

給水方法d—動特性—；水槽は五段とし、振幅比、位相の変化を見るため第一水槽の水位は0.5を中心に0.1振幅で強制的に振動させた。

使用したコンピュータはパーソナルコンピュータとしては初期のもので、プログラム言語はN—BASICを使用し計算は倍精度で行なった。

数値計算の結果を図示するために、(11)式に従って縦軸および横軸を基準化し、それぞれ水位H、時間Tで目盛った。こうすることによって、A、Rおよび $h_0$ の値にかかわらず、最大水位1、単位時間1のグラフとなる。逆に、数値計算から得られた曲線から、現実の時間に合わせたA、Rおよび $h_0$ を選ぶことが可能である。(ただし、Rだけは実験的に求めておく必要がある。) こうした基準化は、必要な常数やパラメーターを明確にすることができ、現象の本質を捕らえ、漏刻の物理的性質の解釈や漏刻復元の際のシステム設計に非常に有効な方法と考えられる。

[静特性の例] 水の供給方法aおよびbにおける水位の変化を図7および図8に示す。

供給方法aでは、受水槽以外については下段の水槽ほど水位の下降に遅れが見られる。第四水槽(受水槽)の上昇速度は始めはほぼ一定であるが次第に減少している。すなわち、水を流し始めてからしばらくは一定の速さで時を刻むが、次第に遅れが目立つようになる。水槽の数を増やすことにより、上昇速度一定の区間が長くなることが期待される。

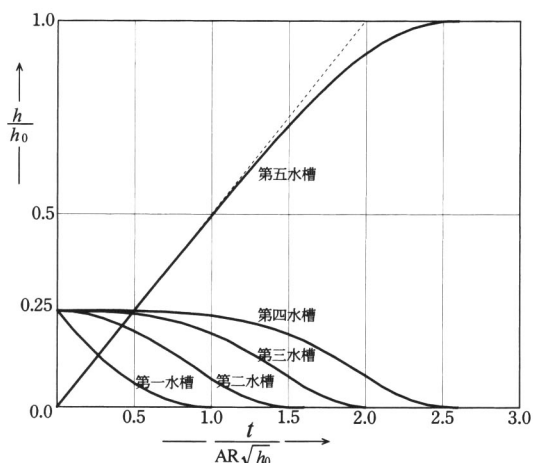


図7. 漏刻の静特性 (給水方法a)

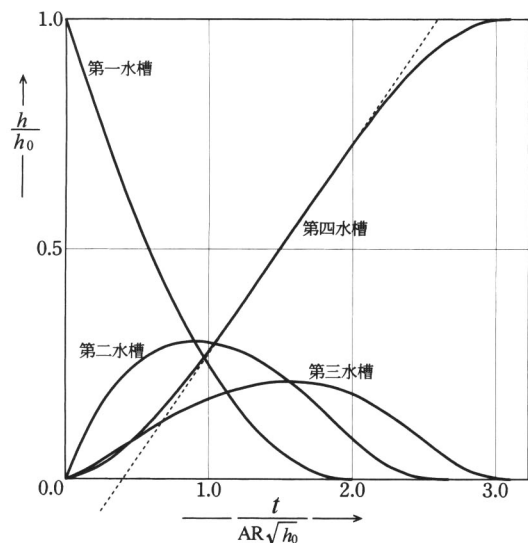


図8. 漏刻の静特性 (給水方法b)

供給方法bでは、受水槽の水位は開始直後ゆっくりと立ち上がり、次第に上昇速度を速め、ある速さに達した後上昇速度は次第に減少し、始めに与えた水位へゆっくりと近付いてゆく。これから、供給方法a, bでは、補正水槽は水位の変動を平滑化する役割を一応は果しているが、時計としては不十分と判断される。

[動特性の例] 供給方法cの場合についての結果の例を図9に示す。ただし、受水槽を満水の状態から始め、水が全て流出したとき常に繰り返し満水にするというものである。従って、繰り返し与えられる水位の変動の周期は単位時間にして2

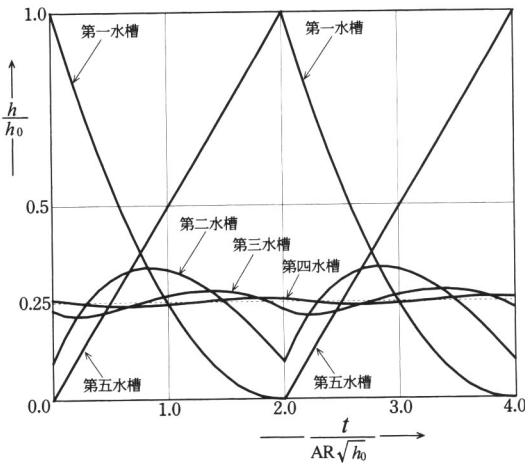


図9. 漏刻の動特性

であり、振幅は単純には計算できないが約0.5である。二段目、三段目の補正水槽に対しては、平均水位の約0.25から始めた。

図より、補正水槽を重ねる毎に水位変動の振幅が減少しているのがわかる。静特性の場合と違って受水槽には際限なく水が流入し、水位は一方向的に上昇する。グラフに見る限り直線性は良く、時計としての利用可能性は十分高いと言うことができる。

## 5. 数値計算の結果と議論

### 1) 漏刻の静特性、動特性及び精度について

[漏刻の静特性—過渡応答] 供給方法aおよびbについて時計として利用でき得るものであるかどうか、数値計算によって得られた水位の変化を調べた。その際、受水槽の上昇曲線が直線的であるほど時計として利用できると考えられる。

給水方法aは初めのうちは安定し上昇するが、次第に遅れが目立つようになり、受水槽を除く他の水槽に水が無くなった所で上昇は止まる。

給水方法bについて図8からもわかるように、四段型漏刻の場合、単位時間 $T=3$ で流水槽の水は全て受水槽に移動する。中間の $T=1$ から $T=2$ までの単位時間1の区間（第一水槽の水が全て第四水槽に移動する間での時間の約3分の1）はほぼ直線的である。いづれの供給方法の場合も、部分的には時計として利用できる区間があるが、十分なものではない。

[漏刻の動特性—周波数応答] 給水方法dは、水槽を信号の伝達系として考え、いろいろな周期に対する入力と出力の振幅比と位相の変化を求めるものである。例として $T=2$ における水槽毎の水位を第一水槽を横軸に、第二～第四水槽の水位を縦軸にとって描いたリサージュ図形を図10に示す。この図から、振幅と位相を求めることができるが、図11は求めた振幅比 $G$ の対数と位相 $P$ の値を縦軸に、周期の逆数を横軸に取ったもので、自動制御理論ではボデー線図と呼ばれるものである。これによって、例えば周期1の時に水槽一段で振幅は10分の1、位相では90度、水槽二段では振幅は100分の1になることが解り、一段ごとに水位の振幅は著しく減少することが解る。これが多段型漏刻の動特性である。

給水方法cにおいて、第一水槽の水は $T=2$ 間隔で満水—空を繰り返している。図9は、段を重ねる毎に著しく水位の変動が減少していることを示している。結果として、動特性が反映しているが、 $T=2$ における一段当たり（二段目）の振幅の減少は約5分の1であり、二段で（三段目）約25分の1、三段で（四段目）125分の1で、段を重ねる毎に著しく振幅が減少し、水位の変位の平滑が十分進んでいることが解る。

[多段型水槽の平滑化機能と漏刻の精度] 漏刻の精度は受水槽に供給される水の流量が一定であることである。前項で示したように多段型水槽の周波数特性は、周期 $T=2$ で水を供給した場合でも著しく平滑化されることを示している。ここで、計算結果と正しい時刻との誤差を図12に示す。これから、四段型漏刻の場合は、 $T=2$ を半日の12時間として、最大14.0分の遅れ、0.6分の進みとなり、14.6分の幅で誤差が変動することが解る。また五段型漏刻の場合は最大0.6分の進み、3.8分の遅れで、誤差の変動の幅は4.4分となり一段の補正水槽の追加が著しい効果を上げていることが解る。

### 2) 水槽の形状による補正

[すり鉢型補正] 水平断面積の等しい直筒型の単一水槽の場合には、水位はほぼ二次曲線を描いて変化することが解った。そのままでは時間の経過とともに遅れが増加する水時計になるが、水平断面積を高さ（水位）によって変化させ、水位変化を一定にすることが可能である。これは、水槽の形状を直線（直筒型）から曲線に変えることで実現できる。



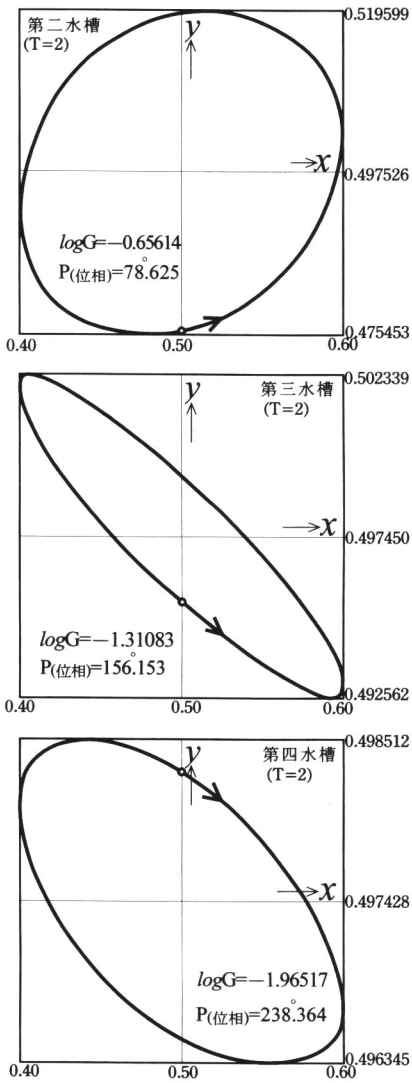


図10. 漏刻の動特性—一周波数応答—

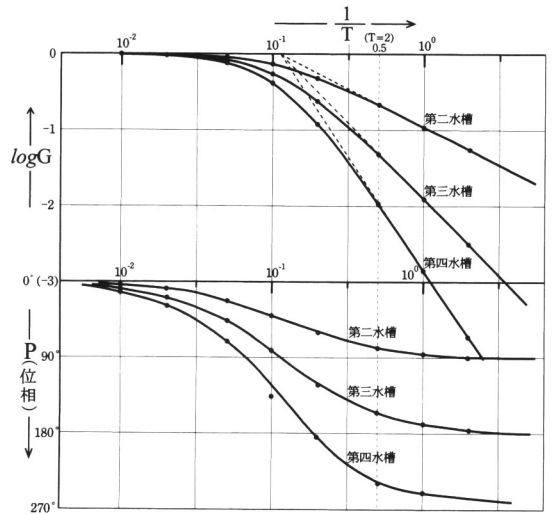


図11. 漏刻の動特性—振幅比・位相変化—

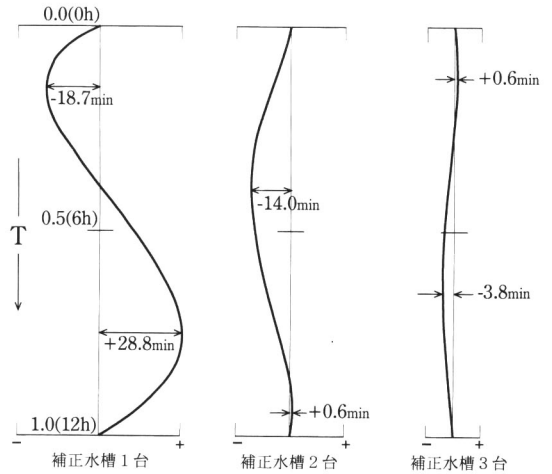


図12. 補正水槽の数と漏刻の誤差の変動

すなわち (6), (7) 式および水位の下降速度一定から、

$$-\frac{\sqrt{h}}{AR_t} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = -d \dots\dots\dots(22)$$

ここで、 $d$ は負の値をとる。続いて、始めに仮定した円筒形水槽の水平断面積を $A_0$ 、水位初期値を $h_0$ とし、基準化の手続きにならって(22)式を次のように変形する。

$$\frac{\sqrt{\frac{h}{h_0}}}{\frac{A}{A_0} R_t \sqrt{h_0}} = d$$

さらに、 $A = \pi r^2$ 、 $A_0 = \pi r_0^2$ と置いて式を整理し、次式を得る。

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = \frac{\sqrt{\frac{h}{h_0}}}{D} \dots\dots\dots(23)$$

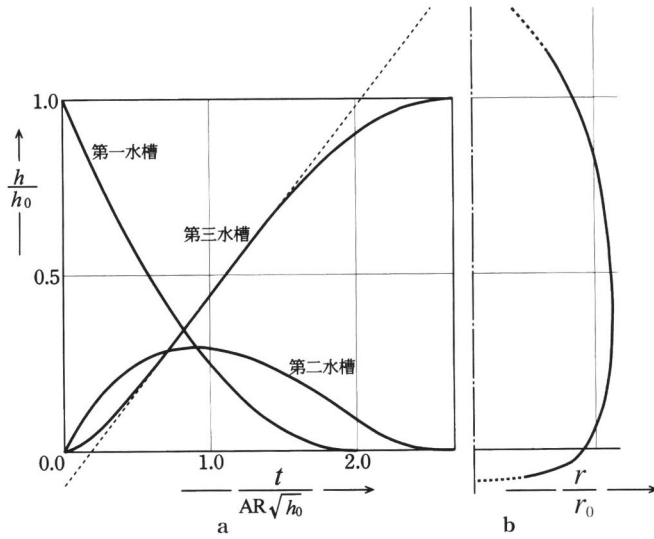


図13. 蓮華漏の水位変化と側壁の曲線

ただし、 $D=dA_0R_t\sqrt{h_0}$

ここで  $\frac{r}{r_0} = R, \frac{h}{h_0} = H$  を代入してによって次式を得る。

$$H = D^2 R^4 \dots\dots\dots(24)$$

これから単一水槽の形状すなわち水位一半径曲線は四次曲線であることが解る。

カイロに保存されている古代エジプトの水時計(B.C.1450)はすり鉢型であるが、その側壁の傾きは、水位によって流量が変化するために発生する時刻の誤差を、近似的に補正する役割をはたしていると考えられる<sup>8)</sup>。

[壺型補正] 蓮花漏は補正水槽一段を含む三段型の漏刻である。従来、この型の漏刻は内部にV字型の切込みのある隔壁をもつオーバーフロー型の補正水槽によって流速の調整を行うものと解釈されている。その一つの根拠として、竹注筒の存在があり、これは第二水槽からオーバーフローした水を成水盆に引き込むための樋とされている(図3)。この蓮花漏に対し水位変化の数値計算を行い、機構についての推論を試みた。

まず、第三水槽(受水槽)を直筒型とし三段型漏刻の水位の変化を計算した。その結果を図13-aに示す。

静特性については四段型漏刻と大きな差異はない。時計として使えそうな時間の範囲は、四段型

のそれと概ね同じで、全体の約3分の1前後である。動特性については、図11に示したように $T=2$ (12時間)として第二水槽の水位の変動幅の減少は5分の1で、補正水槽一段だけでは受水槽の変動を十分に平滑化することはできない。それにもかかわらず、補正水槽が一段しか使われていないのには、何らかの説明が必要である。

水位調整用の隔壁はそれに対する解釈の一つである。しかし本稿では、すり鉢型水時計にならって、直筒型の受水槽でなく水位の変化が一定になるような水槽形状の曲線化による解釈、即ち壺型補正を提案する。

次に、図13-aにおいて第三水槽(受水槽)の曲線の直線部分に沿って接線を引く。この接線傾き $d$ が水の上昇の速度 $\Delta h/\Delta t$ であり、一定となる。ここで、時刻 $T=0$ における接線の縦軸との交点を $H_b$ (bottom)、 $T=T_e$ (終了時)における接線の水位を $H_e$ (end)として、それぞれの値を図中より読みとり接線の傾き $d$ を求める。この場合 $d$ は正の値をとる。

接線の方程式を次式で示す。

$$H_{tan} = dT + H_b \dots\dots\dots(25)$$

ただし、

$$d = \frac{H_t - H_b}{T_e}$$

次に、すり鉢型補正に倣って (24) 式を変形し、半径を求める式、(26) 式を得る。ただし、水位  $H$  には第二水槽の水位を用いる。

$$R = \sqrt[4]{\frac{H}{D^2}} \dots\dots\dots(26)$$

任意の  $H$  における  $T$  を第三水槽の水位曲線から読み取り、その  $T$  における  $H_{min}$  を縦軸に、同じく  $T$  における第二水槽の水位  $H$  から計算で求めた  $R$  を横軸にとって描いた受水槽の曲線を図 13-b に示す。その結果、この曲線は蓮花漏の受水槽である石壺のそれによく似ていることが解った。

蓮華漏の受水槽が中程が膨らんだ壺型であることの根拠を以下にまとめる。

① オーバーフロー型補正水槽によって一定の流量に調節しているとすれば、受水槽は水位によって水平断面積が変わらない直筒型でなければならない。この場合は、流水槽を中央に膨らみのある壺型にする必然性は全くない。

② 静特性を利用する形式の漏刻とすれば、壺型の受水槽は当然の結果とすることができる。この場合は、水槽の数は三段だけで良く、さらに段数を重ねる意味はなくなる。

③ 歴史的に、漏刻の水槽の段数は増加する傾向にあったにもかかわらず、11世紀に蓮花漏では一挙に三段に減っている。水槽の減少の理由は、水位上昇を一定に保つことができるような壺型受水槽の採用と解釈される。

## 6. 結 語

多段型水槽の流水モデルに対して水位変化のシミュレーションを行なった結果、精度については明らかに動特性を利用した方が有利であることがわかった。さらに、補正水槽の数を増やす程精度が向上することが確かめられた。

古代中国では、すでに太陽の南中時刻に日々の

ずれのあることが認められており、それは香時計によるとされている、しかしながら、多段型水槽の漏刻もそれを検出し得る十分な精度を確保できる装置であった可能性は否定されるものでない。また、漏刻の水槽の段数が一般には時代を追って増加する傾向にあるという事実は、漏刻の精度の追求の過程に於て妥当性があることがわかった。

蓮花漏については、流水モデルの静特性を利用したものではないか、という新しい考え方を示すに至った。この場合は水槽の段数を多くする必然性は全くない。壺型受水槽の採用は、定常流に対する受水槽としては説明が困難で、変化する流量を補正するためのものと解釈するほうが自然であると考えられる。

なお、水の粘性抵抗、密度などの温度変化が漏刻の精度におよぼす影響は重要と思われるが、それらについては今後の課題としたい。

## 文 献

- 1) ジョセフ・ニーダム著、藪内清監修、吉田忠他訳、第20章天文学クレプシドラ（水時計）の項、「中国の科学と文明」5巻、pp. 171-192、1991、思索社。
- 2) Needham, J., Ling, W. and Price, D. J. S., A Survey of Chinese Clepsydra Technique, Heavenly Clockwork, pp. 85-94 (1960), Cambridge University Press.
- 3) 田口紘一、木村剛三、『漏刻に関する研究』、有明工業高等専門学校紀要、21: 77-87 (1984)。
- 4) 村上康三、『多段式漏刻の水理特性 (1) — 上段漏壺の影響を受ける —』、滋賀県立短期大学学術雑誌、30: 17-22 (1986)。
- 5) 宮城音五郎、第7章層流と混流、「水力学」、pp. 94-100、1933、岩波全書13。
- 6) 前掲、宮城音五郎、「水力学」、p. 98。表参照。
- 7) 戸川隼人、3.1 水時計、「数値解析とシミュレーション」、pp. 15-21、1976、共立全書211。
- 8) McNown, J. S., When time flowed—The Story of the Clepsydra—, La Houille Balanche, 5: 347-353 (1976)。

