

塑性変形の程度に依存しない破壊靱性の評価

田辺 義一^{1,*}・菅原 玲¹・岩田 修一^{1,2}

¹ 国立科学博物館理工学研究部 〒169-0073 東京都新宿区百人町3-23-1

² 東京大学大学院新領域創成科学研究科 〒277-8561 千葉県柏市柏の葉5-1-5 基盤棟

Estimation of Fracture Toughness Independent of the Degree of Plastic Deformation

Yoshikazu TANABE^{1,*}, Akira SUGAWARA¹ and Shuichi IWATA²

¹ Department of Science and Engineering, National Museum of Nature and Science, 3-23-1 Hyakunin-cho, Shinjuku-ku, Tokyo 169-0073, Japan

² Graduate School of Frontier Science, The University of Tokyo,

Kiban-to, 5-1-5 Kashiwanoha, Kashiwa-city, Chiba 277-8561, Japan

Abstract The experimentally observed fracture toughness K_{Ic}^* is proportional to the true fracture stress σ_T and the root of Charpy impact value I_{cp} as $K_{Ic}^* = k\sigma_T\sqrt{I_{cp}/E}$ where E is the Young's modulus and k a nondimensional constant. This formula is important to estimate the fracture toughness by easily observed values. The crack energy density (CED) \mathcal{E} proposed by Watanabe as the strain energy per unit area at the edge of a crack, is the key concept in this discussion.

If K_{Ic}^* is redefined as the energy per unit area to break the edge of crack as $\mathcal{E}_c = ((1 - \nu^2)/E)K_{Ic}^{*2}$ where \mathcal{E}_c is the critical value of \mathcal{E} for breaking and ν the Poisson's ratio, the equation $K_{Ic}^* = K_{Ic}\sqrt{\Phi_c}$ is derived, where Φ_c the ratio of the observed energy to break the elastic-plastic solid and the one to break the perfectly deformed same solid with the fracture toughness K_{Ic} . The above-mentioned estimation formula is derived from this equation which is meaningful in all states of metallic materials such as elastic, small scale yielding, large scale yielding and general yielding.

Key words: fracture toughness, true fracture stress, Charpy impact value, crack energy density, redefinition of fracture toughness

1. はじめに

弾塑性挙動を示す金属材料，特に不安定破壊（脆性破壊）が問題となる鋼材について，織田・中村・川上は，実験値の詳細な解析から，破壊靱性（或いは破壊靱性値とも言われる）に関して以下の推定式が成り立つことを報告している^{1),2)}。

$$K_{Ic}^* = k\sigma_T\sqrt{\frac{I_{cp}}{E}} \dots\dots\dots(1)$$

ここで， K_{Ic}^* は塑性変形を示す弾塑性材料の破壊靱性， k は定数， σ_T は真破断応力（引張試験にお

いて破壊時の荷重をその時の断面積で除した値）， I_{cp} はシャルピー衝撃値（2mm V ノッチシャルピー衝撃値）， E はヤング率である．ここでは，破壊靱性 K_{Ic}^* が，実験的に求めやすいパラメーターである真破断応力 σ_T ，シャルピー衝撃値 I_{cp} ，ヤング率 E で表されることが重要で，実用上も利用価値が高い．

この推定式 (1) は，1) 線形破壊力学で材料の破壊抵抗とされる破壊靱性 K_{Ic}^* は，真破断応力 σ_T とシャルピー衝撃値 I_{cp} （2mm V ノッチシャルピー衝撃値）の平方根との相乗積に比例する，2) この式は亀裂先端において，小規模降伏から，大規模降伏，さらには全面降伏に至るまでの材料や状態の広い範囲にわたって成立する，等々の重要なこ

* Corresponding author. E-mail: tanabe-y@kahaku.go.jp

とを示している。

破壊力学の分野では、応力拡大係数 K_I 、破壊が生じる限界値としての破壊靱性 K_{Ic} 、エネルギー解放率 G 、その限界値 G_c 、 J 積分、開口変位 COD 等を用いて、破壊現象が議論されている^{3),4)}。しかし現実に生じる破壊現象が非弾性的であるにも関わらず、現在の破壊力学は本質的に弾性の力学であり、種々の矛盾点や不明点も指摘されている。この状況に対して、渡辺は「亀裂エネルギー密度」(Crack Energy Density) なる概念を提唱し、破壊力学における物理的背景について考察している^{5)~7)}。ここでは、亀裂エネルギー密度の概念を用いると、推定式 (1) が導かれることを示す。これは今まで亀裂エネルギー密度なる概念の有効性があまり評価されてこなかった嫌いがあるが、その有効性を示すとともに、推定式 (1) は破壊力学で見落とされていた本質をついたものであることが明らかとなる。なお本報告では、考える試料片の厚さ (3次元 x_1, x_2, x_3 空間のうち、 x_3 軸方向) を単位厚さ 1 と仮定し、2次元 (x_1, x_2 面内) として議論する。

2. 亀裂エネルギー密度の概念に基づく破壊力学の構造について

亀裂エネルギー密度 \mathcal{E} は歪エネルギー面密度としての性質を持つもので、「変形前に考えた亀裂線を含む任意の面において、面をはさむ外側の部分が変形に際して亀裂先端の1点になす単位面積当たりの仕事」と定義されている^{5)~7)}。

実際の材料中の亀裂先端近傍で生じる変形は極めて複雑である。亀裂材は点の集合からなり、変形に従って点の集合が動くと考える。 $\Gamma(a)$ を長さ a の亀裂の初期の状態における亀裂先端に沿った径路とし、 $\Gamma(x_1)$ 、 $\Gamma(a+\Delta a)$ を亀裂前方の x_1 及び $a+\Delta a$ における $\Gamma(a)$ と同じ径路とすると (図1(a)参照)、亀裂エネルギー密度は

$$\tilde{\mathcal{E}} = \int_{\Gamma(x_1)} \tilde{W} dx_2 \dots\dots\dots(2)$$

で与えられる。 \tilde{W} は変形に際して、変形前の1点に実際になされた単位体積当たりの仕事であり、広い意味の歪エネルギー密度である。また離散的な点の集合を考えた場合の亀裂エネルギー密度を \mathcal{E} で表している。式 (2) で表される亀裂エネルギー密度 $\tilde{\mathcal{E}}$ は、初期の状態における $\Gamma(x_1)$ 部分が現在までに担ったエネルギーを亀裂を含む面内の単位

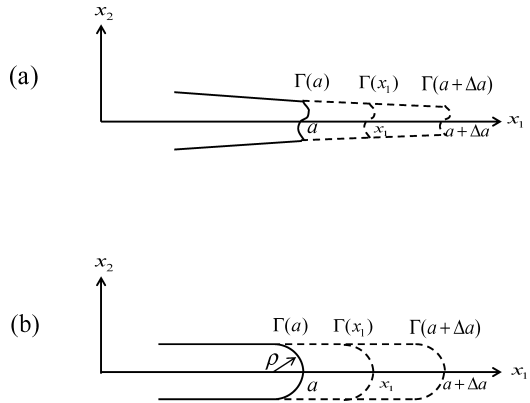


図1. 亀裂先端及び切欠き先端
 (a) 長さ a の亀裂先端における径路 $\Gamma(a)$ と、亀裂前方の同一形状の径路 $\Gamma(x_1)$ 及び $\Gamma(a+\Delta a)$
 (b) 曲率半径 ρ を持つ長さ a の切欠き端における径路 $\Gamma(a)$ と、その前方の同一形状の径路 $\Gamma(x_1)$ 及び $\Gamma(a+\Delta a)$

面積当たりで表したものである。負荷により $\Gamma(x_1)$ 部分に起こった変化の程度を単位面積当たりのエネルギーの次元で捉えたものと考えられる。

連続体として扱える場合、即ち応力 σ_{ij} や歪 ϵ_{ij} が定義できる場合は、

$$\mathcal{E} = \int_{\Gamma(x_1)} W dx_2 \dots\dots\dots(3)$$

である。ここでは有限な曲率半径 ρ をもつ切欠きを亀裂モデルとして考えている。(図1(b)参照) 歪エネルギー密度 W は

$$W = \int_0^t \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \dots\dots\dots(4)$$

である。式 (4) における積分は実際の負荷履歴に従って負荷を始めた時刻 0 より現在の時刻 t まで行う⁵⁾。

このように定義された亀裂エネルギー密度は、荷重-変位曲線により実験的に求められる。亀裂材に単調負荷 P を加えたとき、亀裂長さを a 、変位を u として、全歪エネルギーを $U(a, u) = \int P du$ とすると、

$$\tilde{\mathcal{E}} = - \frac{\partial U}{\partial a} \dots\dots\dots(5)$$

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial U}{\partial a} \dots\dots\dots(6)$$

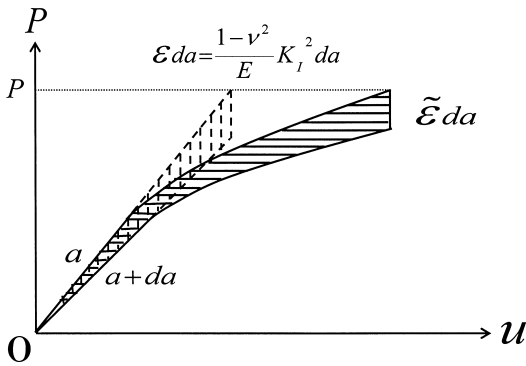


図2. 荷重-変位曲線と亀裂エネルギー密度
初期亀裂長さが a の時と $a+da$ の時の荷重-
変位曲線. この差から亀裂エネルギー密度
が求められる. 点線は完全弾性体の場合の
荷重-変位曲線である.

で与えられる。(図2参照) 点集合として離散的
の分布を考える $\tilde{\mathcal{E}}$ と連続的の分布 (σ_{ij} と ε_{ij} が定義でき
る) を考える \mathcal{E} については, 荷重-変位曲線に大
きな差はなく,

$$\tilde{\mathcal{E}}(a) \approx \mathcal{E}(a) \dots \dots \dots (7)$$

であることが知られている. 従って連続体モデル
で $\mathcal{E}(a)$ が分かれば, $\tilde{\mathcal{E}}(a)$ を推定することができ
る⁵⁾.

また塑性論の全歪理論によっても, 歪増分理論
によっても, 荷重-変位曲線にあまり差はない.
従って全歪理論による $\mathcal{E}(a)$ によって歪増分理論
によるものを近似的に評価してよいことも知られ
ている⁵⁾.

以上の根拠に基づく, J 積分が定義できると
き(線形や非線形の弾性挙動を示す場合, 塑性変
形を示すときは全歪理論に従う場合)は, $\mathcal{E}(a)$ は
亀裂に対する J 積分に等しい値になる. 従って J
積分の議論で得られた多くの結果は, J ではなく
亀裂エネルギー密度 $\mathcal{E}(a)$ に関するものと解釈を
変えれば, 利用可能である⁵⁾.

Barenblatt の結合力モデルの場合, x における原
子面間隔の伸び(開口量)を $\delta(x)$, 結合力を
 $\sigma^*(\delta)$ とすると, 開口変位を $\phi = \delta(0)$ として,

$$\tilde{\mathcal{E}}(a) = \int_0^\phi \sigma^*(\delta) d\delta \dots \dots \dots (8)$$

である⁶⁾. この式は J 積分についても成り立つ. 特
に $\sigma^*(\delta) = \sigma_{cf}$ の場合は $J = \lambda \sigma_{cf} \phi$ が得られる. こ

で σ_{cf} は一定の結合力, ϕ は亀裂先端での開口変位
即ち COD (Crack Opening Displacement) であり, λ
は降伏条件や試験方法(試験片の形状)に依存す
る $1 \leq \lambda \leq 3$ 程度の定数である. この式はまた剛塑
性体について全面降伏の場合にも成り立つことが
知られている⁸⁾. (なお剛塑性体以外の加工硬化を
含む場合や弾性変形を含む場合にも成り立つこと
は示唆されている⁴⁾.) これから J 積分の議論で
得られた成果は, 完全弾性, 小規模降伏, 大規模降
伏, 全面降伏にいたる全領域について弾性亀裂エ
ネルギー密度の議論に解釈し直せばよい.

なお当然のことであるが, J 積分を用いること
ができない場合でも, $\mathcal{E}(a)$ を用いた議論は可能で
ある. $\mathcal{E}(a)$ を用いた議論は塑性変形の程度に依
らず一般的に成り立つ. 本報告では $\mathcal{E}(a)$ に基づく
一般的な場合について議論する.

亀裂先端で塑性降伏がある時は, 亀裂エネル
ギー密度 \mathcal{E} は, 保存されている弾性亀裂エネル
ギー密度を \mathcal{E}^e , 吸収された塑性亀裂エネルギー密
度を \mathcal{E}^p として^{5)~7)},

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^e + \mathcal{E}^p \dots \dots \dots (9)$$

である. 負荷 P を解放すると弾性亀裂エネル
ギー密度 \mathcal{E}^e は解放される.

特に線形弾性体の場合は

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^e = \frac{1-v^2}{E} K_I^2 = G \dots \dots \dots (10)$$

である. K_I は応力拡大係数, v はポアソン比, G
はエネルギー解放率である. ここでは変形様式と
してモード I (開口形) のみを考える. 線形弾性
体の場合は, 亀裂エネルギー密度はエネルギー解
放率とその値が等しくなる. 非線形弾性体の場合
も含めて, 一般に弾性体の場合は, 亀裂先端の局
所の状態を表す量である \mathcal{E} は, 亀裂が進展する時
のエネルギー解放率とその値が等しくなる.

塑性降伏が存在する場合でも, エネルギー解放
率 G' として亀裂が単位面積当たり進展する際に解
放されるエネルギーであると定義することは可能
であり, $G' = \mathcal{E}^e$ と考えられる⁶⁾.

次に, 亀裂の進展のための必要十分条件につ
いてまとめる⁹⁾. 亀裂進展のための必要条件(亀裂
が進展することを前提)は,

$$G' = \mathcal{E}^e \geq 2\gamma_s \dots \dots \dots (11)$$

である. ここで $2\gamma_s$ は単位面積当たりの新表面形

成に必要な表面エネルギー（完全脆性破壊でも、大規模降伏後の破壊でも、新表面形成に要する表面エネルギーと考える）である。一方、十分条件としては、亀裂の進展を考えるとなく定義できる物理量がその限界値に至ったとき破壊が生じると考えて、

$$\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c^e + \mathcal{E}_c^p = \mathcal{E}_c^e + 2\gamma_p \dots\dots\dots(12)$$

である。ここで $2\gamma_p$ は亀裂が生成されるまでに単位面積当たり吸収される塑性仕事である。一般に $\mathcal{E}_c^e \geq 2\gamma_s$ であり、必要条件より十分条件の方が厳しい条件となっている。従って破壊のクライテリオンは、 $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_c$ となる。

3. 推定式に関する議論

3.1 破壊靱性の再定義

塑性降伏を含む一般的な場合の亀裂エネルギー密度 \mathcal{E} は、変形としてモード I（開口形）のみを考えると、

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}^e + \mathcal{E}^p \\ &= \mathcal{E}^{e-linear} + \mathcal{E}^{e-nonlinear} + \mathcal{E}^p \\ &= \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 + \mathcal{E}^{e-nonlinear} + \mathcal{E}^p \dots\dots(13) \end{aligned}$$

である。右辺の項のうち、エネルギー解放率は $G' = ((1-\nu^2)/E)K_I^2 + \mathcal{E}^{e-nonlinear}$ で与えられる。塑性仕事は \mathcal{E}^p である。式 (13) を書き換えて、

$$\mathcal{E} = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 + \Lambda$$

あるいは

$$\mathcal{E} = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \Phi \dots\dots\dots(14)$$

とおく。ここで $\Lambda = \mathcal{E}^{e-nonlinear} + \mathcal{E}^p$, $G = ((1-\nu^2)/E)K_I^2$, $\Phi = 1 + \Lambda/G$ とおいた。

破壊が $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_c$ で生じるとするときの限界値を \mathcal{E}_c とすると、

$$\mathcal{E}_c = \frac{1-\nu^2}{E} K_{Ic}^2 \Phi_c \dots\dots\dots(15)$$

で与えられる。ここで

$\Phi_c = 2(\gamma_s + \gamma_p')/2\gamma_s$, $2\gamma_p' = \mathcal{E}_c^{e-nonlinear} + \mathcal{E}_c^p$, $G_c = 2\gamma_s$ である。さらに式 (15) の右辺を $\mathcal{E}_c = ((1-\nu^2)/E)K_{Ic}^{*2}$ とおくと、亀裂先端部が破壊に至るまでに担いする単位面積当たりのエネルギーを K_{Ic}^* を用いて表現

したことになる。この K_{Ic}^* は広義の破壊靱性であり、破壊を判断する重要なパラメーターとなる。 K_{Ic}^* は完全弾性体の時のみ応力拡大係数やエネルギー解放率と関係づけられるが、塑性変形を含むような一般の場合はこれらとは関係がない。(小規模降伏の場合は近似的に関係が成り立つ。) 亀裂エネルギー密度の限界値と関係した量として再定義された K_{Ic}^* については、

$$K_{Ic}^* = K_{Ic} \sqrt{\Phi_c} \dots\dots\dots(16)$$

である。 Φ_c は弾塑性体の破壊の際の吸収エネルギー $2(\gamma_s + \gamma_p')$ と完全弾性体の破壊の際の吸収エネルギー $2\gamma_s$ の比である。またこの式の K_{Ic} は試料片が塑性変形を受けた後、破断した際に解放されるエネルギーのうち線形弾性に関連した量であり、完全弾性体の破壊靱性と考えられる。推定式で議論すべき弾性亀裂エネルギー密度の限界値 $\mathcal{E}_c^{e-linear} = G_c$ は、破断により解放されるエネルギーのうち、線形弾性で近似される量である。

3.2 Griffith-Orowan-Irwin の式の導出

式 (12), (15), (16) から、

$$\mathcal{E}_c = \frac{1-\nu^2}{E} K_{Ic}^{*2} = \mathcal{E}_c^e + 2\gamma_p \dots\dots\dots(17)$$

さらに、亀裂長さ $2a$, (公称) 破壊応力 σ_F のとき、測定された「破壊靱性」が $K_{Ic}^* = \sqrt{\pi a} \sigma_F$ で表されるとすると、

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{E(\mathcal{E}_c^e + 2\gamma_p)}{\pi a(1-\nu^2)}} \dots\dots\dots(18)$$

である。これは Griffith-Orowan-Irwin の式^{14)~16)}として知られる。測定値 σ_F が $K_{Ic}^* = \sqrt{\pi a} \sigma_F$ として測定されているかどうかには注意する必要がある。

3.3 推定式の導出

式 (16) における破壊靱性 K_{Ic} は、式 (13) から分かるように、保存されている弾性亀裂エネルギー密度のうちの線形寄与分である。弾塑性材料が塑性変形を十分受けた後の破断直前の構造は、もはや塑性変形は生じない構造になっており、その状態で保存されている弾性亀裂エネルギー密度は、完全弾性体の場合に保存されている量と同じと考えられる。完全弾性体の亀裂エネルギー密度の限界値は

$$\mathcal{E}_c^{e-linear} = \frac{1-\nu^2}{E} K_{Ic}^2 \dots\dots\dots(19)$$

であり、これはエネルギー解放率の限界値 G_c に等しい。

鉄鋼材料或いは金属材料が完全弾性体すなわち無欠陥の単結晶であれば、その真破断応力は非常に大きいことが知られている。しかし通常の鉄鋼材料等では、これより1-2桁小さな値になる。これは破断が原子結合の分離切断で生じるのではなく、別の機構で生じていることを示している。ここでは通常の鉄鋼材料等の完全弾性状態での破断は、Griffith¹⁴⁾ が提案した微小亀裂（或いは欠陥）の進展による機構に支配されていると考える。微小亀裂の長さ $2c$ は分布を持つが、ある大きさ $2c_c$ より大きいものは存在しないとす。また $2c_c$ より小さいものは存在しても強度には影響しない。

十分離れた外からの応力場 σ が存在するとき、微小亀裂（欠陥）の周りの応力は微小亀裂端部に集中する。図3に示すように、微小亀裂（長さ $2c$ ）を円で近似すると、右半分の円周分が右端部 O に集中すると考えられる。エネルギー単位で表すと、単位体積当たり $(1-\nu^2)\sigma^2/E$ のエネルギーが半円周 πc の分だけ集まって、単位面積当たり $\pi c(1-\nu^2)\sigma^2/E$ のエネルギーが欠陥端部 O に集中する（ O を含み、 x_2 軸に垂直な面内で）ことになる。（図3を参照）このエネルギーがある値を超えると、破断が生じるとする。

完全弾性状態の材料中の最も大きい $2c_c$ の微小亀裂に集中した単位面積当たりのエネルギー $\pi c_c(1-\nu^2)\sigma^2/E$ が、ある値 G_c に等しくなったとき破断が生じ、この時の応力が材料の真破断応力 σ_T を与えると考え。この時強度 σ_T は、弾性亀裂エネルギー密度の線形部分の限界値 $\mathcal{E}_c^{e-linear}$ 或いはエネルギー解放率の限界値 G_c と次式の関係で与えられる。

$$\mathcal{E}_c^{e-linear} = G_c = \frac{\pi(1-\nu^2)c_c\sigma_T^2}{E} \dots\dots\dots(20)$$

従って式 (16) 右辺の破壊靱性 K_{Ic} は、

$$K_{Ic} = \sqrt{\pi c_c} \sigma_T \dots\dots\dots(21)$$

で与えられる。

次に Φ_c の評価であるが、 $2(\gamma_s + \gamma_p')$ は材料が塑性変形を受け、降伏後、極限強さを經由して真破断強度 σ_T に至るまでの全てのプロセスに必要なエネルギーである。これを実験的に測定しているのは衝撃破壊試験であると考えられる。一般に衝撃試験の場合、衝撃の与え方や試験片の形状により、

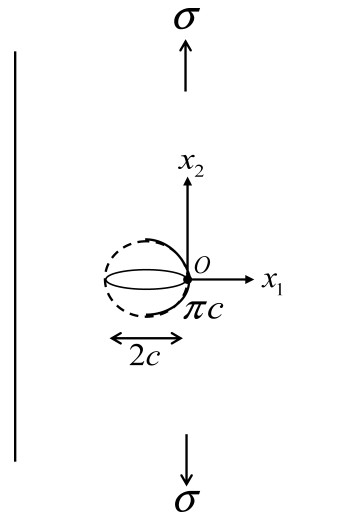


図3. 欠陥端部へのエネルギー集中の概念図

試験片全体にわたる応力や歪の分布は異なる。吸収エネルギーを測定しているのは明確であるが、吸収エネルギーのうち、破壊のためにどの程度エネルギーが使われたかは試験方法による。破壊の進展する部分以外にも塑性変形は生じており、その部分で吸収されたエネルギーの割合が異なるからである。もしある弾塑性材料と同一材料の完全弾性体について、同一の衝撃試験が行えれば、その比をとることにより、 Φ_c を実験的に求めることが可能である。ここでは、よく使われているシャルピー衝撃値 I_{cp} を考えるが、特に亀裂の進展により吸収されたエネルギーを強調して I_{cp}^{crack} と書くことにする。シャルピー衝撃値の内、 I_{cp}^{crack} は破壊の進展に要した部分であるので、

$$I_{cp}^{crack} = 2(\gamma_s + \gamma_p') \dots\dots\dots(22)$$

とおける。なお $\alpha (< 1)$ を定数として $I_{cp}^{crack} = \alpha I_{cp}$ と近似できる。

式 (16) は、式 (21) と (22) より、

$$K_{Ic}^* = k'' \sigma_T \sqrt{I_{cp}^{crack}} = k' \sigma_T \sqrt{I_{cp}} \dots\dots\dots(23)$$

$$k' = k'' \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{c_c}{\gamma_s}} \alpha \dots\dots\dots(24)$$

となる。式 (1) の定数は、 $k = k' \sqrt{E}$ である。

この定数の実験結果との比較には、シャルピー衝撃値 I_{cp} と I_{cp}^{crack} の関係を明確にする必要がある。織田・中村・川上の実験結果^{1,2)}からは $\alpha \approx 0.2-0.8$

である．一方田中ら¹⁷⁾による低温での測定値では $2\gamma_p \sim 3.6 \times 10^3 (\text{N m}^{-1})$ であり，織田らによる低温での測定値 $I_{cp} \sim 1 \times 10^2 (\text{kgf cm}^{-1}) = 0.98 \times 10^5 (\text{N m}^{-1})$ を用いると $\alpha \sim 4 \times 10^{-2}$ 程度となる．この時は α は1桁小さい．しかし同一試料について測定した I_{cp} ではない．

また微小亀裂（欠陥）の大きさ c_c は材料により変化するが， K_{Ic}^* に対してその効果は平方根で影響し，比例する σ_T の効果より小さい．

例えば $2\gamma_s = 2 (\text{J m}^{-2})$ ， $E = 200 (\text{GPa})$ ， $2c_c = 80 (\text{nm})$ ， $\alpha = 0.5$ とすると， $k'\sqrt{E} \approx 80$ 程度である．係数 $k = k'\sqrt{E}$ の評価には αc_c が大きく影響する．

4. ま と め

金属材料等の弾塑性挙動を示す材料の破壊については，亀裂エネルギー密度の概念を用いると見通しよく説明することができる．亀裂エネルギー密度の議論から， $K_{Ic}^* = K_{Ic} \sqrt{\Phi_c}$ が成り立つことが分かる．ここで K_{Ic}^* は亀裂エネルギー密度の限界値から定義される広義の「破壊靱性」というべきもので，「亀裂先端部が破壊に至るまでに担いえるエネルギーを単位面積当たりで表したもの」である．また Φ_c は弾塑性体の破壊の際の吸収エネルギー $2(\gamma_s + \gamma_p')$ と完全弾性体の破壊の際の吸収エネルギー $2\gamma_s$ の比である．

この式 $K_{Ic}^* = K_{Ic} \sqrt{\Phi_c}$ から推定式 (1) を導くことができる．推定式 (1) は，完全弾性体，小規模降伏，大規模降伏から全面降伏に至るまで全領域で成り立つ．

謝 辞

本研究の遂行に当たり，研究内容について種々議論して頂き，貴重なご指導ご助言を頂いた中村誠さん（元三菱重工業（株）長崎研究所技師長）には深甚の謝意を表します．また福田征孜さん（元三菱重工業（株）取締役長崎造船所長）には貴重な資料の提供等お世話になりました．特に記して感謝申し上げます．

Appendix

小規模降伏或いは大規模降伏を中心に J 積分¹⁰⁾ で議論された結果を用いて，式 (14) が導かれることを示す．

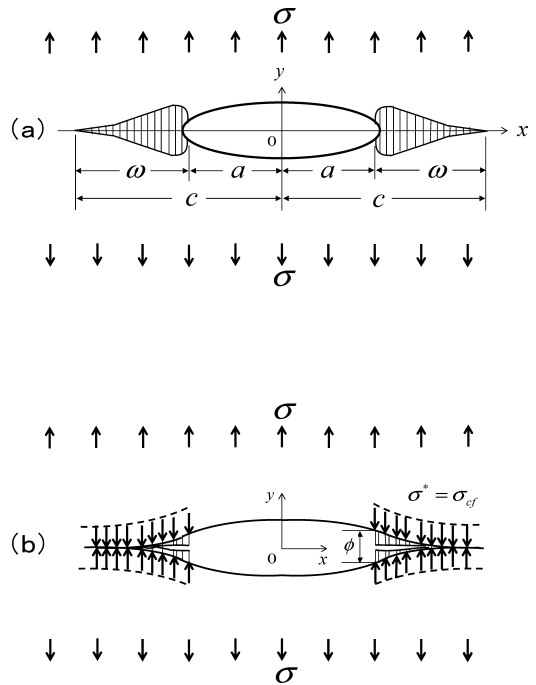


図4．亀裂先端の結合力モデル
(a) 薄板に生じる亀裂端の細長い塑性域
(b) Dugdale モデル ((a)をモデル化)

A1. Dugdale モデル（完全弾塑性体に対するモデル）による記述

Dugdale モデル^{3),4),11)} は，外部応力が降伏応力 σ_Y に達するまでは弾性体であり，降伏応力を超えると加工硬化なしで塑性変形をすると近似したものである．図4に示すように，亀裂先端（長さ $2a$ ）に前方に伸びた細長い塑性域（大きさ ω ）を考える．亀裂の大きさとしてこの塑性域を含んだ領域（長さ $2c = 2(a + \omega)$ ）を考え，塑性域 ω の部分の亀裂内面に外力 σ とは別の結合力 σ^* が作用したモデルを考える．この結合力を塑性域全体にわたって一定としたもの ($\sigma^* = \sigma_{cf}$) が Dugdale モデルである．結合力 σ_{cf} としては，降伏応力 σ_Y 乃至は塑性拘束（多軸応力状態）を考慮するときは実効的降伏応力 $\lambda \sigma_Y$ を取ることが多い． λ は塑性拘束係数 (plastic constraint factor) であり，通常 $1 < \lambda < 3$ といわれる．開口端 $|x| = a$ における開口変位 ϕ は，

$$\phi = \frac{8\sigma_{cf}a}{\pi E} \log\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{8\sigma_{cf}a}{\pi E} \log\left[\sec\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_{cf}}\right)\right] \dots\dots\dots(25)$$

で与えられる^{4),13)}．ここでは塑性域の大きさに関する条件は何も入っていないことに留意する必要がある．またこのモデルでは塑性域のヤング率は塑性変形前のヤング率と同じとしている．なおヤング率としては，ポアソン比を ν として，平面歪状態では $E/(1-\nu^2)$ ，平面応力状態では E であるが，これらを通常のように E と表現している．

このDugdaleモデルの J 積分は， $J = \sigma_{cf} \phi$ で与えられるので，

$$J = \frac{8\sigma_{cf}^2 a}{\pi E} \log \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_{cf}} \right) \right] \dots\dots\dots(26)$$

である³⁾．これを書き直すと

$$J = \frac{\pi a \sigma^2}{E} \Psi \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_{cf}} \right) \dots\dots\dots(27)$$

ここで，

$$\Psi \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_{cf}} \right) = \frac{2 \log \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_{cf}} \right) \right]}{\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_{cf}} \right)^2} \dots\dots\dots(28)$$

である．式(27)は， J 積分がみかけ上，弾性体におけるエネルギー解放率 $G = \pi a \sigma^2 / E$ と関数 $\Psi\{(\pi/2)(\sigma/\sigma_{cf})\}$ の積で表される，即ち $J = G\Psi$ であることを示している．ここで，関数 $\Psi\{(\pi/2)(\sigma/\sigma_{cf})\}$ は塑性効果を表す関数である．

また式(27)は，長さ $2a^*$ を持つ等価な亀裂を考えると，

$$\frac{a^*}{a} = \Psi \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_{cf}} \right) \dots\dots\dots(29)$$

として

$$J = \frac{\pi a^* \sigma^2}{E} = \frac{K_I^{*2}}{E} \dots\dots\dots(30)$$

と書ける．ここで $K_I^* = \sqrt{\pi a^*} \sigma$ とおいた．この $K_I^* = \sqrt{\pi a^*} \sigma$ は完全弾性体の応力拡大係数と全く同じ形式をしている．従ってDugdaleモデルが成り立つ場合，大規模降伏を示す場合でも，亀裂の長さ $2a$ を仮想的な $2a^*$ に置き換え，塑性変形の効果を繰り込むと，形式上式(30)が成り立つことが分かる．

図5に関数 Ψ の応力比依存性を示す． $\sigma/\sigma_{cf} \leq 0.445$ のときは $\Psi \leq 1.09$ であり， $\Psi = 1$ と近似できる．従って $\sigma/\sigma_{cf} \leq 0.445$ であれば，弾塑性体について

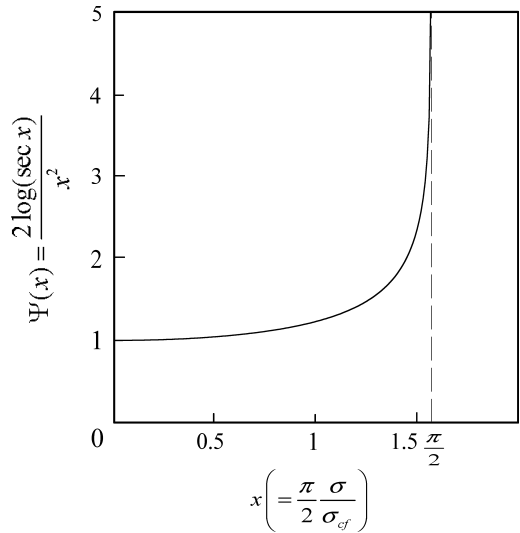


図5．関数 $\Psi(x) = 2 \log(\sec x) / x^2$ の，応力比 $x = (\pi/2)(\sigma/\sigma_{cf})$ に対する依存性

も，常に

$$J = G = \frac{\pi a \sigma^2}{E} \dots\dots\dots(31)$$

であると言える．

A2. 加工硬化のある弾塑性体の場合の J 積分の形
前節のDugdaleモデルは完全弾塑性体についての議論であるが，加工硬化のある場合についても，形式的ではあるが議論を拡張することができる．

大規模降伏の場合の J 積分は，亀裂面間の距離を δ として，結合力が $\sigma^* = \sigma^*(\delta)$ で与えられる時，

$$J = \int_0^{\phi} \sigma^*(\delta) d\delta \dots\dots\dots(32)$$

と与えられる^{3),10)}．Dugdaleモデルでは $\sigma^* = \sigma_{cf} = const$ としたが，加工硬化を考慮すると，

$$\sigma^*(\delta) = \sigma_{cf} + f(\delta) \dots\dots\dots(33)$$

とおくことができる．ここで $f(\delta) = E_{tan} \delta / B + f_1(\delta)$ であり， E_{tan} は接線係数， B は板厚， $f_1(\delta)$ は高次の項である．Riceは $f(\delta) = E_{tan} \delta / B$ の場合について解析している¹⁰⁾．式(33)の場合，

$$J = \sigma_{cf} \phi \left(1 + \frac{1}{\sigma_{cf} \phi} \int_0^{\phi} f(\delta) d\delta \right) = \sigma_{cf} \phi F(\phi) \dots\dots(34)$$

と書ける．一方開口変位 ϕ は，式(25)から分かる

ように、弾性変形の場合は $\sigma_{cf}a/E$ に比例する。この結果は小規模降伏に限らず、大規模降伏でも成り立つ。弾性変形を超える大きな変形の場合にどのような形になるかは不明であるが、応力 (σ や σ_{cf}) の増加とともにまず弾性変形が生じ、その後非線形の効果が現れてくると考えられるので、 $\sigma_{cf}a/E$ に比例する項に非線形の効果が加わってくる。従って

$$\phi = \frac{\sigma_{cf}a}{E} H(\sigma, \sigma_{cf}, a, E) \dots\dots\dots(35)$$

といった形で表されることが予想できる。これから大規模降伏の場合、一般的に

$$J = \frac{\pi a \sigma^2}{E} \Phi(\sigma) \dots\dots\dots(36)$$

と書ける。ここで、関数 $\Phi(\sigma)$ は、

$$\Phi(\sigma) = \frac{F(\phi)H(\sigma, \sigma_{cf}, a, E)}{\pi \left(\frac{\sigma}{\sigma_{cf}} \right)^2} \dots\dots\dots(37)$$

と複雑な関数である。関数 $\Phi(\sigma)$ は関数 Ψ と同じく、塑性変形の効果を表す関数である。関数 $\Phi(\sigma)$ は小規模降伏の結果につながるべきであるから、 $\sigma/\sigma_{cf} \rightarrow 0$ のとき、 $\Phi(\sigma) \rightarrow 1$ である。

式 (36) は形式上式 (27) と同じであり、前節の議論がそのまま使える。一般的な弾塑性体において、亀裂先端方向への細長い塑性域が生じる場合 (結合力モデルが成り立つ場合)、等価な亀裂長さを $a^* = a\Phi(\sigma)$ とおけば、完全弾性体と全く同じ形式の J 積分が得られる。これは大規模降伏、小規模降伏の条件を問わない。

参考文献

1) 織田貞四郎, 中村 誠, 川上浩司, 1975. 「鋼材の破壊靱性値と引張および衝撃性質との関係」. 日本金属学会誌, 39(7), 725-735.

2) 織田貞四郎, 中村 誠, 川上浩司, 1975-1. 「小形試験法による破壊じん性推定法」. 三菱重工技報, 12(1), 100-107.

3) 岡村弘之, 2006. 「線形破壊力学入門」. 培風館.

4) 白鳥正樹, 三好俊郎, 松下久雄, 1999. 「数値破壊力学」. 実教出版株式会社.

5) 渡辺勝彦, 1985. 「き裂エネルギー密度の立場から見た疲労き裂進展」. 日本機械学会論文集 (A編), 51(463), 873-882.

6) 渡辺勝彦, 1981. 「破壊力学パラメータとしてのき裂エネルギー密度概念の提唱とその役割と考え方」. 日本機械学会論文集 (A編), 47(416), 406-415.

7) 渡辺勝彦, 1982. 「弾塑性き裂のき裂エネルギー密度とエネルギー解放率」. 日本機械学会論文集 (A編), 48(433), 1226-1236.

8) 白鳥正樹, 三好俊郎, 1981. 「全面降伏した剛塑性体における COD と J 積分の関係」. 日本機械学会論文集 (A編), 47(420), 800-804.

9) 渡辺勝彦, 1980. 「エネルギー論の立場から見たき裂進展のための必要条件と十分条件」. 日本機械学会講演論文集 No. 804-1, 91-94.

10) J. R. Rice, 1968. "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", Trans. ASME, J. Appl. Mech. 35, 379-386.

11) D. S. Dugdale, 1960. "Yielding of Steel Sheets Containing Slits", J. Mech. Phys. Solids, 8, 100-104.

12) G. I. Barenblatt, 1962. "The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture", Advances in Applied Mechanics, 7, 55-129.

13) F. M. Burdekin, D. E. W. Stone, 1966. "The Crack Opening Displacement Approach to Fracture Mechanics in Yielding Materials", J. Strain Analysis, 1(2), 145-153.

14) A. A. Griffith, 1920. "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids", Phil. Trans. Roy. Soc., 221, 163-198.

15) E. Orowan, 1949. "Fracture and Strength of Solids", Reports on Progress in Physics, 12, 185-232.

16) G. R. Irwin, 1948. "Fracture Dynamics", Trans. A.S.M., 40A, 147-166.

17) 田中啓介, 藤山一成, 中川幸長, 中村 研, 川辺泰嗣, 1980. 「構造用定炭素鋼における延性ぜい性破壊機構の X 線的研究」, 材料, 29(322), 710-716.